Operations Research.

Chapter 3: The Transportation and Assignment problems

Dr. Hà Văn Hiếu

University of Economics and Law

10th November 2020

Bài toán vận tải - The Transportation problem

- Gaspard Monge formalized this problem in 1781.
- Monge–Kantorovich transportation problem.
- Linear programming formulation of the transportation problem is known as the Hitchcock–Koopmans transportation problem.

Example - p320

Procter & Gamble (P&G) is the world's largest and most profitable consumer products company. It makes and markets hundreds of brands of consumer goods worldwide and had over $83 billion in sales in 2012. *Fortune* magazine ranked the company at 5th place in its "World's Most Admired Companies" list in 2011.

The company has grown continuously over its long history tracing back to the 1830s. To maintain and accelerate that growth, a major OR study was undertaken to strengthen P&G's global effectiveness. Prior to the study, the company's supply chain consisted of hundreds of suppliers, over 50 product categories, over 60 plants, 15 distribution centers, and over 1,000 customer zones. distribution system for its North American operations. The result was a reduction in the number of North American plants by almost 20 percent, *saving over* **$200 million** in pretax costs *per year*.

A major part of the study revolved around *formulating and solving transportation problems* for individual product categories. For each option regarding the plants to keep open, and so forth, solving the corresponding transportation problem for a product category showed what the distribution cost would be for shipping the product category from those plants to the distribution centers and customer zones.

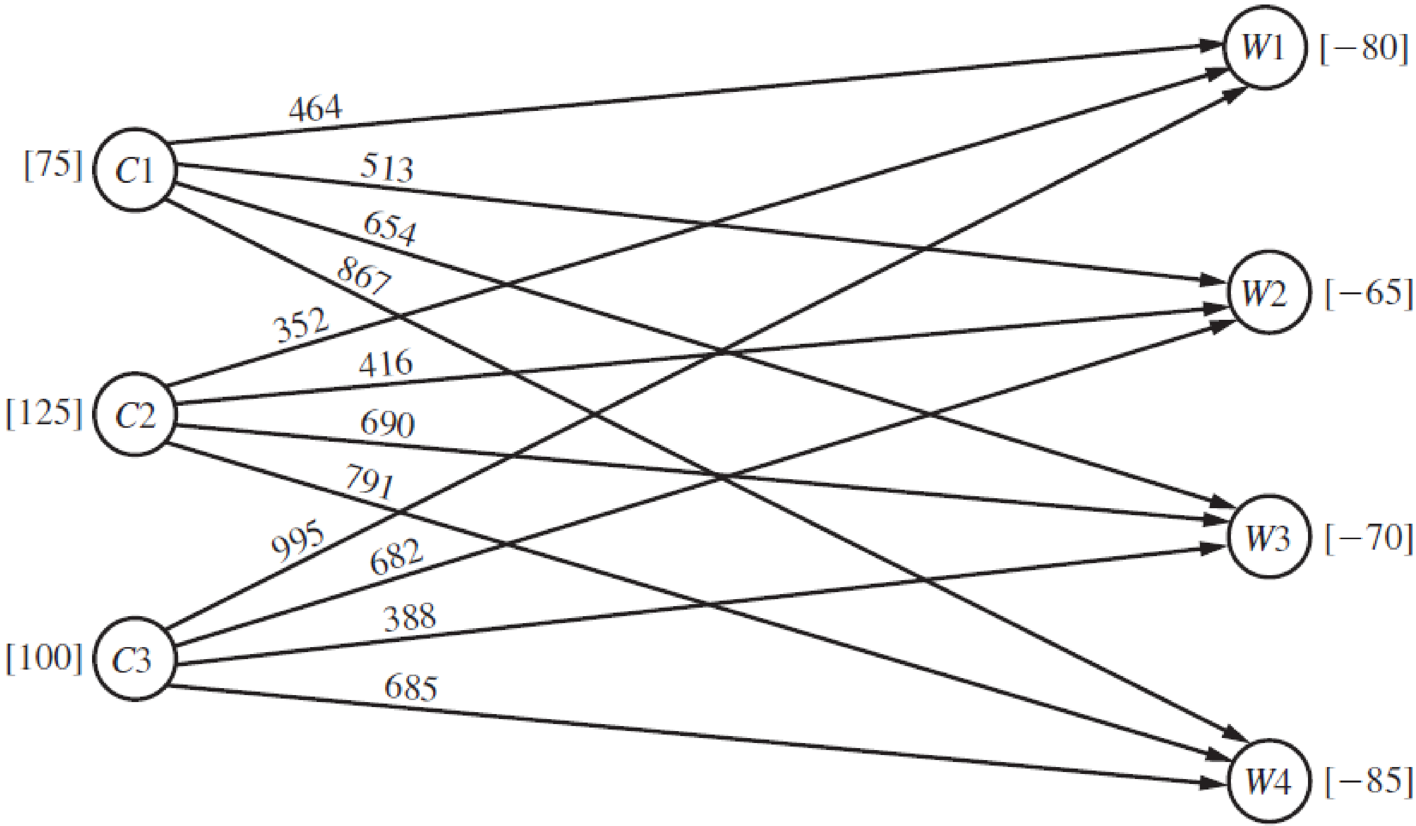
Example

TABLE 9.2 Shipping data for P & T Co.

		Shipping Cost ($) per Truckload				
		Warehouse				
		1	2	3	4	Output
Cannery	1	464	513	654	867	75
	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
Allocation		80	65	70	85	

- Lập kế hoạch vận chuyển để tối thiểu hóa chi phí.

Example



[75] C1
[125] C2
[100] C3
W1 [−80]
W2 [−65]
W3 [−70]
W4 [−85]
464
513
654
867
352
416
690
791
995
682
388
685

The (balanced) Transportation Problem Model

Định nghĩa

Bài toán vận tải là bài toán tối thiểu hóa chi phí cho việc phân phối hàng hóa từ một tập hợp các nguồn (kho, sources) đến các trạm (đích, destinations). Với các giả thiết như sau:

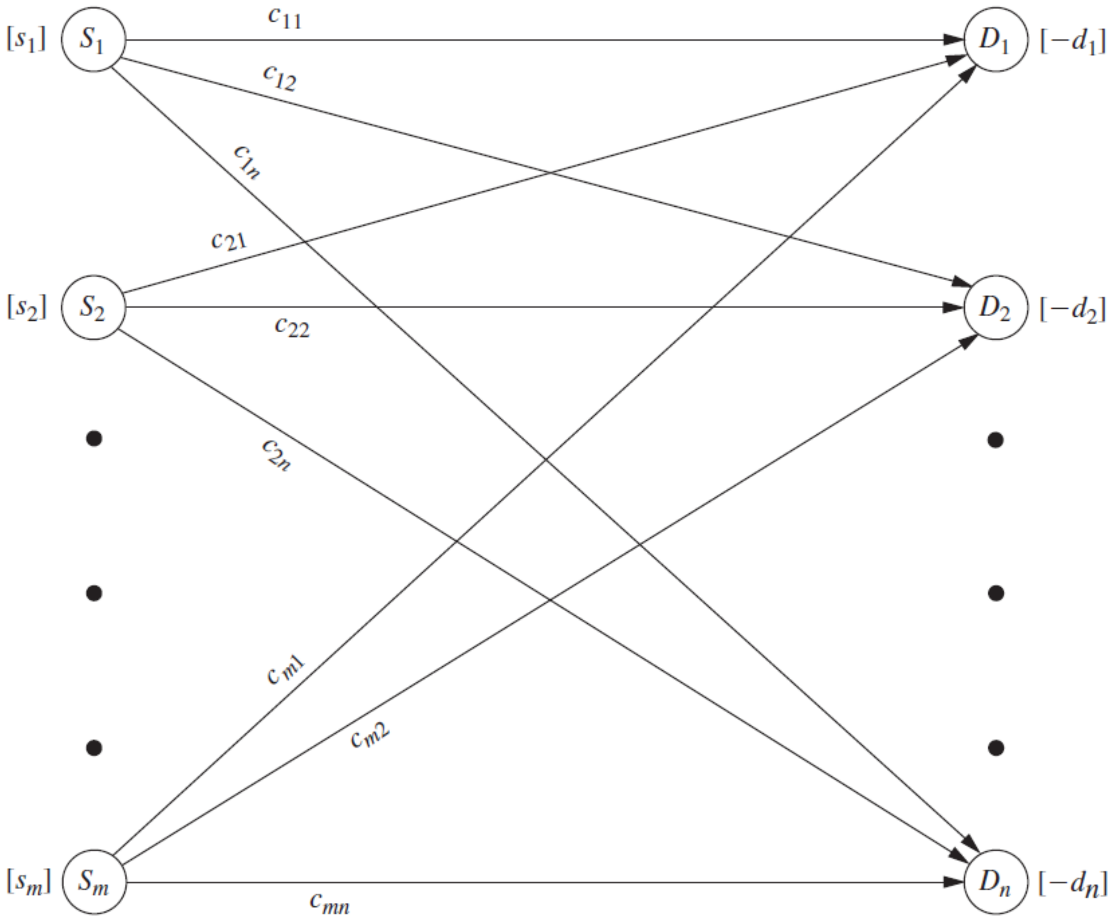
- Mỗi nguồn chứa một lượng hàng hóa cố định (certain supply of units).
- Mỗi trạm cần một lượng hàng hóa cố định (certain demand for units).
- Các trạm chỉ nhận hàng hóa từ các nguồn.
- Tất cả lượng hàng hóa từ các nguồn phải được phân phối hết và tất cả các trạm phải nhận đủ lượng hàng hóa như nhu cầu.
- Chi phí cho việc phân phối mỗi đơn vị sản phẩm từ một particular source đến một particular destination là cố định.

Parameter table for the transportation problem

TABLE 9.5 Parameter table for the transportation problem

		Cost per Unit Distributed				
		Destination				
		1	**2**	$\cdots$	$\boldsymbol{n}$	**Supply**
Source	1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1
	2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	s_2
	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
	m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	s_m
Demand		d_1	d_2	$\cdots$	d_n	

Network representation of the transportation problem



Linear Programming model

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize} \quad && Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} && \\
&\text{subject to} && && \\
& && \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i && \text{for } i = 1, 2, \ldots, m \\
& && \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j && \text{for } j = 1, 2, \ldots, n \\
& && x_{ij} \geq 0 && \text{for all } i, j
\end{aligned}
$$

Balanced transportation problems

- Bài toán vận tải sẽ có PA nếu như tổng lượng cung của các nguồn bằng với tổng lượng cầu của các trạm.

Nếu ta có m sources, trong đó nguồn i có lượng cung là s_i, và n destinations, trong đó trạm j có lượng cầu là d_j thì để bài toán có PA, điều kiện cần và đủ là

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_m = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$

Một bài toán như trên còn được gọi là một bài toán vận tải cân bằng.

Unbalanced transportation problems

Trong thực tế

- Nguồn cung thường biểu thị giá trị tối đa mà nó có thể chứa.
- Lượng cầu tại các trạm là biểu diễn lượng cầu tối thiểu mà trạm đó cần.

Bài toán như thế không yêu cầu điều kiện cân bằng. Tuy nhiên ta có thể "reformulate" bài toán này thành bài toán cân bằng bằng cách thêm vào các nguồn giả (*dummy source*) hoặc trạm giả (*dummy destination*).

Các phương pháp giải bài toán Vận tải

Phương pháp tìm nghiệm tối ưu:

1. Phương pháp đơn hình.
2. Phương pháp duyệt tuần tự.
3. Phương pháp phân phối cải tiến.

Phương pháp tìm phương án cực biên ban đầu

1. Phương pháp góc tây bắc.
2. Phương pháp chi phí thấp nhất.
3. Phương pháp xấp xỉ Vogel.

Bảng vận tải

To / From	A	B	C	Supply
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4	5	12	275
Demand	200	100	300	600

Phương pháp góc tây bắc (Northwest corner rule)

<u>**Nguyên tắc:**</u> Phân bổ nhiều nhất vào góc tây bắc của bảng vận tải.

To / From	A	B	C	Supply
1	6	8	10	**150**
2	7	11	11	**175**
3	4	5	12	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương pháp góc tây bắc (Northwest corner rule)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất vào góc tây bắc của bảng vận tải.

To / From	A	B	C	Supply
1	6 150	8	10	**150**
2	7	11	11	**175**
3	4	5	12	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương pháp góc tây bắc (Northwest corner rule)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất vào góc tây bắc của bảng vận tải.

To / From	A	B	C	Supply
1	6 150	8	10	150
2	7 50	11	11	175
3	4	5	12	275
Demand	200	100	300	600

Phương pháp góc tây bắc (Northwest corner rule)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất vào góc tây bắc của bảng vận tải.

To / From	A	B	C	Supply
1	cost **6**; **150**	cost **8**	cost **10**	**150**
2	cost **7**; **50**	cost **11**; **100**	cost **11**	**175**
3	cost **4**	cost **5**	cost **12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương pháp góc tây bắc (Northwest corner rule)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất vào góc tây bắc của bảng vận tải.

To / From	A	B	C	Supply
1	6 / **150**	8	10	**150**
2	7 / **50**	11 / **100**	11 / **25**	**175**
3	4	5	12	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương pháp góc tây bắc (Northwest corner rule)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất vào góc tây bắc của bảng vận tải.

To / From	A	B	C	Supply
1	[6] **150**	[8]	[10]	**150**
2	[7] **50**	[11] **100**	[11] **25**	**175**
3	[4]	[5]	[12] **275**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương pháp chi phí rẻ nhất

<u>**Nguyên tắc:**</u> Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất

From \ To	A	B	C	Supply
1	**6**	**8**	**10**	**150**
2	**7**	**11**	**11**	**175**
3	**4**	**5**	**12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương pháp chi phí rẻ nhất

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất

To / From	A	B	C	Supply
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4 200	5	12	275
Demand	200	100	300	600

Phương pháp chi phí rẻ nhất

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất

To / From	A	B	C	Supply
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4 200	5 75	12	275
Demand	200	100	300	600

Phương pháp chi phí rẻ nhất

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất

To / From	A	B	C	Supply
1	6	8 25	10	**150**
2	7	11	11	**175**
3	4 200	5 75	12	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương pháp chi phí rẻ nhất

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất

To / From	A	B	C	Supply
1	**6**	**8** **25**	**10** **125**	**150**
2	**7**	**11**	**11**	**175**
3	**4** **200**	**5** **75**	**12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương pháp chi phí rẻ nhất

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất

From \ To	A	B	C	Supply
1	6	8 25	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Demand	200	100	300	600

Phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất ở hàng hay cột có chi phí cơ hội lớn nhất. Chi phí cơ hội là hiệu của chi phí bé nhất và bé kế trong cùng hàng (hay cột).

To / From	A	B	C	Supply
1	6	8	10	150
2	7	11	11	175
3	4	5	12	275
Demand	200	100	300	600

Phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method)

<u>**Nguyên tắc:**</u> Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất ở hàng hay cột có chi phí cơ hội lớn nhất. Chi phí cơ hội là hiệu của chi phí bé nhất và bé kế trong cùng hàng (hay cột).

To / **From**	**A**	**B**	**C**	**Supply**	
1	**6**	**8**	**10**	**150**	**2**
2	**7**	**11**	**11**	**175**	**4**
3	**4**	**5**	**12**	**275**	**1**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**	
	2	**3**	**1**		

Phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất ở hàng hay cột có chi phí cơ hội lớn nhất. Chi phí cơ hội là hiệu của chi phí bé nhất và bé kế trong cùng hàng (hay cột).

From \ To	A	B	C	Supply	
1	6	8	10	150	2
2	7 175	11	11	175	4
3	4	5	12	275	1
Demand	200	100	300	600	
	2	3	1		

Phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất ở hàng hay cột có chi phí cơ hội lớn nhất. Chi phí cơ hội là hiệu của chi phí bé nhất và bé kế trong cùng hàng (hay cột).

From \ To	A	B	C	Supply	
1	6	8	10	150	2
2	7 175	11	11	175	4
3	4	5 100	12	275	1
Demand	200	100	300	600	
	2	3	1		

Phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất ở hàng hay cột có chi phí cơ hội lớn nhất. Chi phí cơ hội là hiệu của chi phí bé nhất và bé kế trong cùng hàng (hay cột).

To / From	A	B	C	Supply	
1	6	8	10	150	2
2	7 175	11	11	175	4
3	4 25	5 100	12	275	1
Demand	200	100	300	600	
	2	3	1		

Phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất ở hàng hay cột có chi phí cơ hội lớn nhất. Chi phí cơ hội là hiệu của chi phí bé nhất và bé kế trong cùng hàng (hay cột).

To / From	A	B	C	Supply	
1	**6**	**8**	**10**	**150**	**2**
2	**7** **175**	**11**	**11**	**175**	**4**
3	**4** **25**	**5** **100**	**12** **150**	**275**	**1**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**	
	2	**3**	**1**		

Phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method)

Nguyên tắc: Phân bổ nhiều nhất có thể vào các ô có chi phí bé nhất ở hàng hay cột có chi phí cơ hội lớn nhất. Chi phí cơ hội là hiệu của chi phí bé nhất và bé kế trong cùng hàng (hay cột).

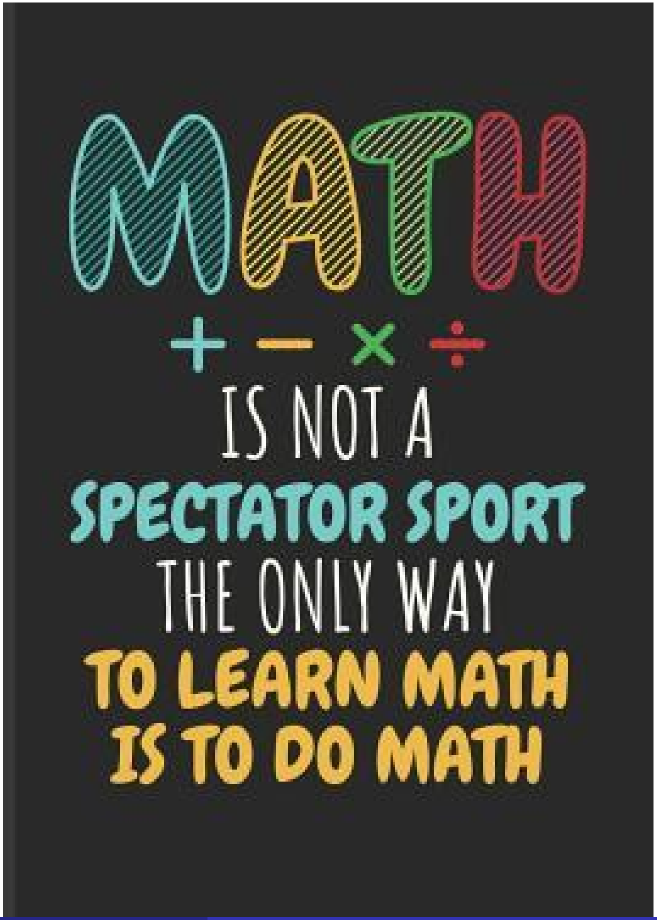
To / From	A	B	C	Supply	
1	6	8	10 150	150	2
2	7 175	11	11	175	4
3	4 25	5 100	12 150	275	1
Demand	200	100	300	600	
	2	3	1		

Một vài đặc trưng của PPĐH cho BTVT (Transportation simplex method)

Bài tập nhóm

Cho bài toán QHTT như trên.

1. Xác định các ràng buộc trên có ĐLTT hay không?
2. Nếu không ĐLTT thì hạng của hệ ràng buộc là bao nhiêu?
3. Một PACB của bài toán BTVT có tối đa bao nhiêu phần tử khác 0?
4. Một PACB là không suy biến khi nó có chính xác bao nhiêu phần tử khác 0?



Phương pháp duyệt tuần tự (The Stepping-stone solution method

Lưu ý quan trọng: Phương pháp này chỉ sử dụng để tìm nghiệm tối ưu khi PACB ban đầu là không suy biến.

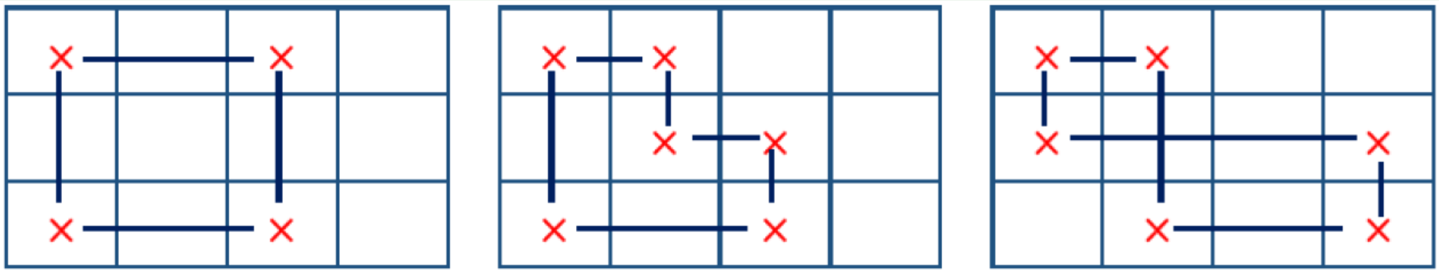
1. **Xác định PACB ban đầu:** Xác định PACB ban đầu bằng một trong 3 phương pháp trên.
2. **Tính chỉ số cải tiến** I_{ij} cho tất cả các ô rỗng.
3. **Dấu hiệu tối ưu:** Nếu tất cả $I_{ij} \geq 0$, PA đang xét là tối ưu. Nếu tồn tại $I_{ij} < 0$, chọn ô có I_{ij} nhỏ nhất, điều chỉnh để được PA mới tốt hơn.
4. **Điều chỉnh PA**: Xác định lại bảng vận tải và quay lại bước 2.

Tính chỉ số cải tiến I_{ij} (1)

Để tính các chỉ số cải tiến, trước tiên cần tạo các chu trình (closed loop). Nguyên tắc tạo chu trình

- Bắt đầu từ một ô trống.
- Đi qua các ô có số (đã được điền).
- Kết thúc tại ô trống đã tạo ban đầu.
- Chỉ có thể đi ngang hoặc đi dọc.
- Không đi qua 3 ô trên cùng một hàng hoặc một cột.

Example



Tính chỉ số cải tiến I_{ij} (2)

1. Thêm + vào ô trống, sau đó thêm lần lượt − và + vào các ô tiếp theo trong chu trình đã chọn.
2. Tiếp tục làm vậy cho đến khi hết tất cả các ô trống (có thể điền chu trình).
3. Những ô trống không thể điền chu trình thì giữ nguyên.

From \ To	A	B	C	Supply
1	+ [6]	− [8] 25	[10] 125	150
2	[7]	[11]	[11] 175	175
3	− [4] 200	+ [5] 75	[12]	275
Demand	200	100	300	600

Tính chỉ số cải tiến I_{ij} (2)

1. Thêm + vào ô trống, sau đó thêm lần lượt − và + vào các ô tiếp theo trong chu trình đã chọn.
2. Tiếp tục làm vậy cho đến khi hết tất cả các ô trống (có thể điền chu trình).
3. Những ô trống không thể điền chu trình thì giữ nguyên.

To / From	A	B	C	Supply
1	6	− 8 25	+ 10 125	150
2	7	+ 11	− 11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Demand	200	100	300	600

Tính chỉ số cải tiến I_{ij} (2)

1. Thêm + vào ô trống, sau đó thêm lần lượt − và + vào các ô tiếp theo trong chu trình đã chọn.
2. Tiếp tục làm vậy cho đến khi hết tất cả các ô trống (có thể điền chu trình).
3. Những ô trống không thể điền chu trình thì giữ nguyên.

To / From	A	B	C	Supply
1	6	+ 8 25	− 10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	− 5 75	+ 12	275
Demand	200	100	300	600

Tính chỉ số cải tiến I_{ij} (2)

To / From	A	B	C	Supply
1	+ 6	− 8 25	10 125	**150**
2	7	11	11 175	**175**
3	− 4 200	+ 5 75	12	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Ô	Chu trình	Chỉ số cải tiến
1A	1A-1B-3B-3A	$6 - 8 + 5 - 4 = -1$

Tính chỉ số cải tiến I_{ij} (2)

To / From	A	B	C	Supply
1	6	− 8 25	+ 10 125	150
2	7	+ 11	− 11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Demand	200	100	300	600

Ô	Chu trình	Chỉ số cải tiến
1A	1A-1B-3B-3A	$6 - 8 + 5 - 4 = -1$
2B	2B-2C-1C-1B	$11 - 11 + 10 - 8 = 2$

Tính chỉ số cải tiến I_{ij} (2)

To / From	A	B	C	Supply
1	6	+ 8 25	− 10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	− 5 75	+ 12	275
Demand	200	100	300	600

Ô	Chu trình	Chỉ số cải tiến
1A	1A-1B-3B-3A	$6 - 8 + 5 - 4 = -1$
2B	2B-2C-1C-1B	$11 - 11 + 10 - 8 = 2$
3C	3C-1C-1B-3B	$12 - 10 + 8 - 5 = 5$

Điều chỉnh phương án

1. Chọn ô có chỉ số âm nhất là ô 1A.
2. Trong các chu trình có sử dụng ô 1A, xác định các ô được đánh dấu "$-$", trong các ô được đánh dấu trừ này, xác định ô có phân phối ít nhất. Trong trường hợp này là ô 1B và lượng phân phối tương ứng là 25.
3. Các ô gắn dấu "$+$" sẽ được gắn giá trị mới bằng cách cộng thêm vào một lượng ở bước trước, trong khi các ô được gắn dấu "$-$" thì sẽ trừ đi lượng đó. Trong trường hợp này ta $+25$ vào các ô 1A, 3B và -25 vào các ô 1B, 3A.
4. Tính toán lại các chỉ số cải tiến I_{ij}. Tiếp tục điều chỉnh nếu chưa thấy dấu hiệu tối ưu.
5. **Dấu hiệu tối ưu:** tất cả các chỉ số cải tiến đều không âm.

To / From	A	B	C	Supply
1	6	8 25	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Demand	200	100	300	600

Bài tập nhóm: Tính các chỉ số cải tiến của phương án mới.

Điều chỉnh phương án

To / From	A	B	C	Supply
1	+ **6**	− **8** **25**	**10** **125**	**150**
2	**7**	**11**	**11** **175**	**175**
3	− **4** **200**	+ **5** **75**	**12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Bài tập nhóm: Tính các chỉ số cải tiến của phương án mới.

Điều chỉnh phương án

To / From	A	B	C	Supply
1	+ 6 25	− 8	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	− 4 175	+ 5 100	12	275
Demand	200	100	300	600

Bài tập nhóm: Tính các chỉ số cải tiến của phương án mới.

Điều chỉnh phương án

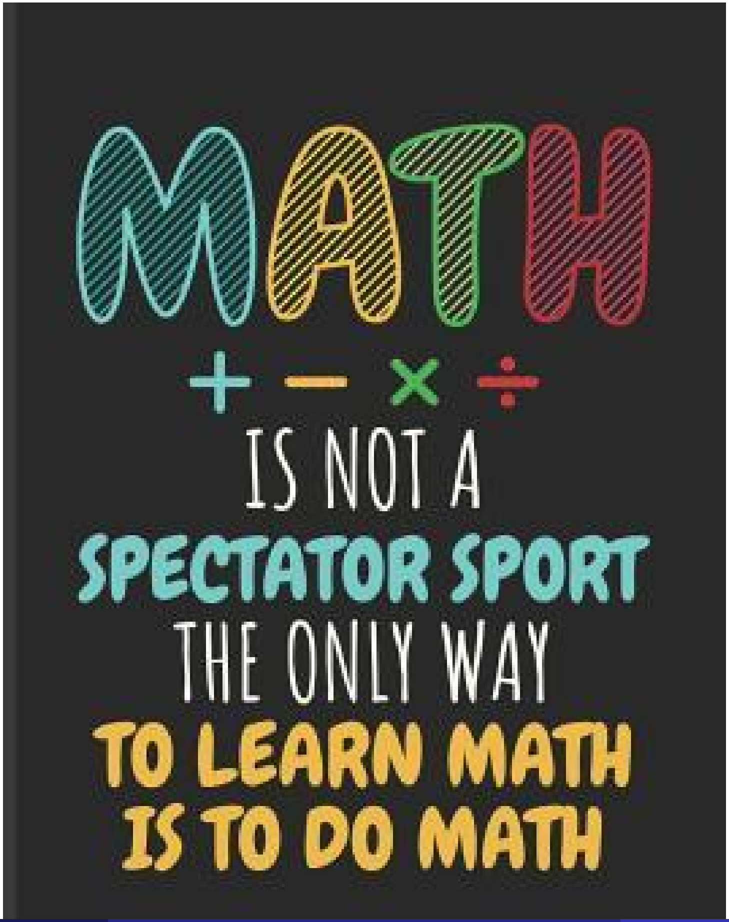
To / From	A	B	C	Supply
1	6 25	8	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 175	5 100	12	275
Demand	200	100	300	600

Bài tập nhóm: Tính các chỉ số cải tiến của phương án mới.

Bài tập thuyết trình

1. Nghiệm nguyên của BTVT - p325 - Integer solutions property.
2. Ví dụ về nguồn giả (p330).
3. Ví dụ về trạm giả (p327).
4. Bài toán trung chuyển.
5. Bài toán vận tải không cân bằng.
6. Phương pháp phân phối cải tiến.
7. Cơ sở lý thuyết của phương pháp phân phối cải tiến và phương pháp duyệt tuần tự.

Exercises: 9.1-2, 3, 4, 5, 6, 7



Any question?

Thank you!